Vektorski prostor

Realni vektorski prostor

Definicija Realni vektorski prostor je skup V zajedno sa dva zakona kompozicije:

(a) sabiranje: $V \times V \longrightarrow V$ (pišemo $(\vec{v},\vec{w}) \rightsquigarrow \vec{v}+\vec{w}$)

(b) skalarno množenje: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (pišemo $(c,\vec{v}) \rightsquigarrow c\vec{v}$)

Ovi zakoni kompozicije moraju zadovoljavati sljedeće 4 aksiome:

(I) sabiranje čini V u Abelovu grupu V^+ (zatvorenost, asocijativnost, postoje neutralni i inverzni elem., komutativnost)

(II) skalarno množenje je asocijativno sa množenjem realnih brojeva $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$

(III) skalarno množenje sa realnim brojem 1 je identična operacija: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

(IV) važe dva distributivna zakona: $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

$$a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}.$$

(#) Sa $\mathbb{R}^3$ označimo skup svih vektor kolona $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ gdje su $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Definišimo sljedeće dvije operacije:

vektorsko sabiranje $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$ i

skalarno množenje $c \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix}$.

Dokažimo da ove operacije čine $\mathbb{R}^3$ vektorskim prostorom.

Rj. Trebamo provjeriti da li su zadovoljene četri navedene aksiome iz definicije.

(I) Sabiranje čini $\mathbb{R}^3$ Abelovom grupom

(a) zatvorenost: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ za $\forall \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

(b) asocijativnost: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ b_3+c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \\ a_3+(b_3+c_3) \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \\ (a_3+b_3)+c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ vrijedi zakon asocijativnosti

(c) neutralni element je $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

(d) inverzni element je $\begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vrijedi aksioma (I)

(e) komutativnost: PROVJERITI ZA VJEŽBU

(II) $\forall (a,b \in \mathbb{R})\ \forall (\vec{v} \in \mathbb{R}^3)\quad (ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$

$$(ab)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)a_1 \\ (ab)a_2 \\ (ab)a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(ba_1) \\ a(ba_2) \\ a(ba_3) \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} ba_1 \\ ba_2 \\ ba_3 \end{bmatrix} = a\left(b\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right)$$

vrijedi aksioma (II)

(III) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad 1 \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ vrijedi aksioma (III)

(IV) $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ i $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

$$(a+b)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)a_1 \\ (a+b)a_2 \\ (a+b)a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1+ba_1 \\ aa_2+ba_2 \\ aa_3+ba_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ aa_2 \\ aa_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ba_1 \\ ba_2 \\ ba_3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

DRUGU OSOBINU PROVJERITI ZA VJEŽBU

Sve četri aksiome su zadovoljene, prema tome $\mathbb{R}^3$ je vektorski prostor.

(#) Dat je neki vektorski prostor V. Pokazati da vrijede sljedeći identiteti:

(a) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ za sve $\vec{v} \in V$

(b) $c\vec{0} = \vec{0}$ za sve $c \in \mathbb{R}$

(c) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ za sve $\vec{v} \in V$

Rj. (a) $\underline{\underline{0\vec{v}}} + 0\vec{v} \overset{\text{distributivni zakon}}{=\!=} (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} = \underline{\underline{0\vec{v}}} + \vec{0} \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$ q.e.d.

(b) $\underline{\underline{c\vec{0}}} + c \cdot \vec{0} \overset{\text{distributivni zakon}}{=} c(\vec{0}+\vec{0}) = c\vec{0} = \underline{\underline{c\vec{0}}} + \vec{0} \Rightarrow c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ q.e.d.

(c) $\vec{v} + (-1\vec{v}) = 1\vec{v} + (-1)\vec{v} = (1+(-1))\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$

prema tome $-1\vec{v}$ je inverzni element sabiranja od $\vec{v}$

$\Rightarrow -1\vec{v} = -\vec{v}$ q.e.d.

Podskup W prostora V je podprostor prostora V ako i samo ako je W neprazan podskup od V i:
$\forall(\vec{v},\vec{w}\in W)\ \forall(a\in\mathbb{R})$ vrijedi da je: $\vec{v}+\vec{w}\in W$
$a\vec{v}\in W$.
Dokazati.

Rj. „$\Rightarrow$": postavka zadatka: W vektorski podprostor prostora V $\Rightarrow$ $\forall\vec{v},\vec{w}\in W$ $\forall a\in\mathbb{R}$ $\vec{v}+\vec{w}\in W$ i $a\vec{v}\in W$

Ako je W vektorski podprostor prostora V to znači da su zadovoljene 4 aksiome iz definicije vektorskog prostora pa iz prve aksiome $\Rightarrow$ $(V,+)$ Abelova grupa $\Rightarrow$ $\forall\vec{v},\vec{w}\in V$ $\vec{v}+\vec{w}\in V$ q.e.d.
Također iz definicije je definisano skalarno množenje pa je $\forall\vec{v}\in V$ $\forall a\in\mathbb{R}$ $a\vec{v}\in W$ q.e.d.

„$\Leftarrow$": postavka zadatka: $W\subseteq V$
$\forall(\vec{v},\vec{w}\in W)\ \forall(a\in\mathbb{R})$
$\vec{v}+\vec{w}\in W$ i $a\vec{v}\in W$ $\Rightarrow$ W vektorski podprostor prostora V

Pokažimo da W zadovoljava aksiome iz definicije
(I) sabiranje čini V Abelovom grupom
(a) zatvorenost: iz postavke zadatka $\forall(\vec{v},\vec{w}\in W)$ $\vec{v}+\vec{w}\in W$
(b) asocijativnost: sabiranje u V je asocijativno pa kako je $W\subseteq V$ to je sabiranje u W asocijativno
(c) neutralni element: ako za a uzmem nula iz pretpostavke zadatka imam $0\vec{v}\in W$ tj. $\vec{0}\in W$ za $\forall\vec{v}$.
(d) inverzni element: ako za a uzmem $a=-1$ imamo $-1\vec{v}\in W$ iz pretpostavke zadatka pa $-\vec{v}\in W$
(e) komutativnost: sabiranje u V je komutativno pa kako je $W\subseteq V$ to je sabiranje u W komutativno
Prema tome $(V,+)$ jest Abelova grupa
Aksiome (II), (III) i (IV) vrijede za vektorski prostor V a kako je $W\subseteq V$ (ili W je dio iz V) to ove aksiome vrijede i za W.
Prema tome: W vektorski podprostor prostora V.

Pokazati da je skup $\{\vec{0}\}$ podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$

Rj. Trebamo pokazati da vrijedi: $W\neq\emptyset$, $W\subseteq\mathbb{R}^3$
$\forall(\vec{v},\vec{w}\in\{\vec{0}\})\ \forall(\alpha\in\mathbb{R})$ $\vec{v}+\vec{w}\in\{\vec{0}\}$ i $\alpha\vec{v}\in\{\vec{0}\}$.
Jedini element koji možemo uzeti iz $\{\vec{0}\}$ je $\vec{0}$ pa je
$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\in\{\vec{0}\}$
$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha\vec{0}=\vec{0}\in\{0\}$ Prema tome $\{\vec{0}\}$ je podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Pokazati da je W podprostor od $\mathbb{R}^3$ gdje je $W=\{(a,b,c): a+b+c=0\}$ tj. W je sačinjen od onih vektora koji imaju osobinu da mu je suma komponenti jednak 0.

Rj. Trebamo pokazati da je W neprazan podskup od $\mathbb{R}^3$, i $\forall(\vec{v},\vec{w}\in W)\ \forall(\alpha\in\mathbb{R})$ $\vec{v}+\vec{w}\in W$ i $\alpha\vec{v}\in W$.
W je neprazan (npr. $(1,-1,0)\in W$)
W je podskup od $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$).
Uzmimo dva vektora iz W, $\vec{v},\vec{w}\in W$
$\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)$, $a_1+a_2+a_3=0$; $\vec{w}=(b_1,b_2,b_3)$, $b_1+b_2+b_3=0$.
$\vec{v}+\vec{w}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$.
Kako je $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)=0$ to je $\vec{v}+\vec{w}\in W$ q.e.d.
Neka je $\alpha\in\mathbb{R}$ proizvoljan realan broj,
$\alpha\vec{v}=\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)$
kako je $\alpha a_1+\alpha a_2+\alpha a_3=\alpha(a_1+a_2+a_3)=0$ to je $\alpha\vec{v}\in W$ q.e.d.
Prema tome W je podprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(#) $P(x)$ predstavlja vektorski prostor polinoma. Označimo sa $P_2(x)$ podskup od $P(x)$ koji sadrži sve polinome stepena ≤ 2 ($ax^2+bx+c \in P_2(x)$, $a,b,c \in R$). Pokazati da je $P_2(x)$ vektorski podprostor prostora $P(x)$.

Rj. Trebamo pokazati da je $P_2(x)$ neprazan podskup od $P(x)$ i da vrijedi $\forall(p(x), g(x) \in P_2(x))\ \forall(\alpha \in R)$ $p(x)+g(x) \in P_2(x)$
$\alpha p(x) \in P_2(x)$

$P_2(x)$ je neprazan (npr. $3x^2+2x-1 \in P_2(x)$)

$P_2(x)$ je podskup od $P(x)$ ($P(x) = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid n \in N, a_i \in R\}$)

Uzmimo dva polinoma iz $P_2(x)$ npr. $p(x), g(x) \in P_2(x)$

$$p(x)+g(x) = a_2x^2+a_1x+a_0 + b_2x^2+b_1x+b_0 = (a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+a_0+b_0$$

kako su $a_2+b_2,\ a_1+b_1,\ a_0+b_0 \in R$ to $p(x)+g(x) \in P_2(x)$ q.e.d.

Uzmimo proizvoljno $\alpha \in R$

$$\alpha p(x) = \alpha(a_2x^2+a_1x+a_0) = \alpha a_2 x^2 + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

tj. $\alpha p(x) \in P_2(x)$ q.e.d.

Prema tome $P_2(x)$ je vektorski podprostor prostora $P(x)$.

(#) Neka je V vektorski prostor svih kvadratnih $n \times n$ matrica nad skupom realnih brojeva. Pokazati da je W vektorski podprostor od V gdje:

a) W sadrži sve simetrične matrice tj. sve matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ za koje $a_{ji} = a_{ij}$

b) W sadrži sve matrice koje komutiraju sa datom matricom T tj. $W = \{A \in V \mid AT = TA\}$.

Rj. a) Trebamo pokazati da je W neprazan podskup od V za koji vrijedi $\forall(A, B \in V)\ \forall(\alpha \in R)$ $A+B \in W$ i $\alpha A \in W$.

W je neprazan (npr. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$).

W je podskup od V (W je skup svih simetričnih matrica dok je V skup svih kvadratnih matrica

Uzmimo dvije proizvoljne matrice $A, B \in W$

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ za koje $a_{ji} = a_{ij}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ za koje $b_{ji} = b_{ij}$.

$$A+B = [a_{ij}]_{n \times n} + [b_{ij}]_{n \times n} = [a_{ij}+b_{ij}]_{n \times n}$$

Kako su $a_{ij} = a_{ji}$ i $b_{ij} = b_{ji}$ to je $a_{ji}+b_{ji} = a_{ij}+b_{ij}$ pa je $A+B \in W$ q.e.d.

Uzmimo proizvoljni skalar $c \in R$

$c \cdot A = c \cdot [a_{ij}]_{n \times n} = [c a_{ij}]_{n \times n}$, kako je $a_{ij} = a_{ji}$ to je i $c a_{ij} = c a_{ji}$ pa je i $cA \in W$ q.e.d.

Prema tome W je vektorski podprostor prostora V.

b) OVAJ DIO URADITI ZA VJEŽBU